СВОЙСТВА СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА В МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ КОНФЛИКТНЫМИ ПОТОКАМИ

М. А. Рачинская, М. А. Федоткин

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
Н. Новгород, Российская Федерация
E-mail: rachinskaya.maria@gmail.com, fma5@rambler.ru

На примере системы регулирования движения транспорта на перекрестке магистралей построена модель циклического управления конфликтными потоками определенной вероятностной структуры и обслуживания требований указанных потоков. Получены необходимые и достаточные условия существования стационарного режима функционирования системы. Выведена система линейных уравнений, определяющая вид стационарного распределения.

Ключевые слова: конфликтные потоки, неординарные пуассоновские потоки, стационарное распределение, производящие функции, определитель Вандермонда.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ

Изучается система регулирования движения транспорта на пересечении нескольких магистралей. Для построения модели подобной системы предлагается рассматривать ее как систему массового обслуживания с переменной структурой и применять идеи, методы и результаты теории вероятностей и, в частности, теории марковских процессов. Так, транспортные потоки по нескольким направлениям воспринимаются как входные потоки системы массового обслуживания. При этом, под обслуживанием понимается пропуск машин (заявок) некоторого потока через регулируемый перекресток. Такое регулирование, или разрешение и запрещение движения потоков через перекресток, осуществляется светофором. Обслуживающий прибор в данном случае включает как условия переезда машин через перекресток, так и светофор. Автомобили, которые пересекли перекресток, образуют выходные потоки. Предполагается также, что входные потоки являются конфликтными, т. е. не могут обслуживаться в непересекающиеся промежутки времени. Обслуживание заявок любого потока производится в порядке их поступления в систему и без потерь. Перейдем к описанию элементов рассматриваемой системы. Входными потоками рассматриваемой системы являются $m \geq 2$ конфликтных потоков $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$ машин, поступающих на перекресток после длительного движения по магистралям. В работе [1] было показано, что при некоторых условиях транспортный поток может быть хорошо аппроксимирован неординарным пуассоновским потоком. К таким условиям относятся неблагоприятные дорожные и погодные условия, а также различное поведение водителей машин и невысокая интенсивность движения. По потоку Π_j, $1 \leq j \leq m$, в каждый вызывающий момент с интенсивностью λ_j поступает пачка из одной, двух или трех заявок с вероятностью соответственно p_j, q_j или s_j ($p_j + q_j + s_j = 1$). Заявки, поступившие в систему, ожидают начала обслуживания в накопителях $O_1, O_2, \ldots, O_m$ бесконечного размера по соответствующим потокам. Для управления потоками и обслуживания требований выбрано устройство (светофор) с $2m$ состояниями $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(2m)}$ и циклическим алгоритмом их смены вида $\Gamma^{(1)} \to \Gamma^{(2)} \to \ldots \to \Gamma^{(2m)} \to \Gamma^{(1)} \to \ldots$. При этом в каждом состоянии вида $\Gamma^{(2j-1)}$, $1 \le j \le m$, обслуживаются только заявки потока Π_j, а в состоянии вида $\Gamma^{(2j)}$ происходит переналадка светофора. Это означает, что в состоянии $\Gamma^{(2j)}$ завершается обслуживание потока Π_j, начатое в состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$, новые заявки не обслуживаются. Длительность нахождения обслуживающего устройства в состоянии $\Gamma^{(j)}$ равна T_j. За промежуток времени $T = T_1 + T_2 + \ldots + T_{2m}$ происходит полный цикл смены состояний светофора. Заявки каждого потока выбираются из накопителя на обслуживание согласно экстремальной стратегии [2]. При экстремальной стратегии за промежуток времени длительностью T_{2j-1} через перекресток переезжает максимально возможное количество машин, находящихся в очереди, но не превышающее величины $l_j = [\mu_j T_{2j-1}]$. Здесь μ_j есть интенсивность обслуживания потока Π_j. Экстремальная стратегия обслуживания и свойства состояний $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(2m)}$ светофора однозначно определяют так называемые потоки насыщения $\Pi_1^*, \Pi_2^*, \ldots, \Pi_m^*$ [2]. На содержательном уровне потоки насыщения являются выходными потоками системы, когда в очередях всегда имеются заявки. Выходные потоки в действительности обслуженных заявок будем обозначать через символы $\Pi'_1, \Pi'_2, \ldots, \Pi'_m$. Отметим, что устроенная таким образом система может быть адекватной моделью не только для процесса регулировки движения транспорта на перекрестке. Например, подобные модели могут быть использованы для описания реальных циклических систем, в которых длительности времён обслуживания требований являются зависимыми случайными величинами с неодинаковыми законами распределения.

Будем рассматривать функционирование системы в моменты τ_i, $i = 0, 1, \ldots$, переключения состояний $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(2m)}$ обслуживающего устройства. Последовательность этих моментов является случайной в силу начального распределения состояния светофора в момент τ_0 и различных значений величин T_k, $1 \le k \le 2m$. Такой последовательностью временная ось разбивается на случайные промежутки $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots$ Случайный элемент Γ_i, $i = 0, 1, \ldots$, описывающий состояние обслуживающего устройства на интервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$, принимает на этом интервале постоянное значение из множества $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(2m)}\}$. Введем случайные величины, характеризующие функционирование системы по каждому из потоков Π_j, $1 \le j \le m$, на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$ или на его границе. Пусть $æ_{j,i} \in \{0, 1, \ldots\}$ – число заявок, находящихся в очереди O_j в момент τ_i. Пусть также случайные величины $\eta_{j,i} \in \{0, 1, \ldots\}$, $\xi_{j,i} \in \{0, l_j\}$ и $\xi'_{j,i} \in \{0, 1, \ldots, l_j\}$ считают на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$ по потоку Π_j число поступивших заявок, максимально возможное число обслуженных заявок и, наконец, число реально обслуженных заявок. Число требований потока Π_j, которые были обслужены на промежутке $[0, \tau_0)$, описывается величиной $\xi'_{j,-1}$. В работе [1] были получены соотношения

$$\varphi_j(n;t) = e^{-\lambda_j t} \sum_{u=0}^{[n/2]} \sum_{v=0}^{[n-2u/3]} \binom{n-u-2v}{u,\, v,\, n-2u-3v} p_j^{n-2u-3v} q_j^u s_j^v \frac{(\lambda_j t)^{n-u-2v}}{(n-u-2v)!} \tag{1}$$

для условной вероятности $\mathbf{P}(\eta_{j,i} = n \mid \Gamma_i = \Gamma^{(k)}) = \varphi_j(n; T_k)$ в случае неординарного пуассоновского входного потока указанной выше структуры, где $n \in \{0, 1, \ldots\}$, $1 \le k \le 2m$.

В силу независимости потоков, циклического алгоритма смены состояний $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(2m)}$ и соотношения баланса $æ_{j,i+1} = æ_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi'_{j,i}$ для очереди O_j в работе [2] показано, что $\left(\Gamma_{i+1}, ж_{j,i+1}, \xi'_{j,i}\right) = \left(u(\Gamma_i), \max\{0, ж_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, \min\{ж_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}\right)$. Здесь функция $u(\Gamma^{(k)}) = \Gamma^{(k+1)}$ при $k \in \{1, 2, \ldots, 2m-1\}$ и $u(\Gamma^{(2m)}) = \Gamma^{(1)}$. Динамика работы системы по потоку Π_j определяется последовательностью $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,i-1}); i = 0, 1, \ldots\}$. Доказано, что при заданном начальном распределении $(\Gamma_0, æ_{j,0}, \xi'_{j,-1})$ последовательность $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,i-1}); i = 0, 1, \ldots\}$ является управляемой однородной цепью Маркова со счетным числом состояний. Итак, построена вероятностная модель системы управления m конфликтными потоками в классе циклических алгоритмов управления с интервалами переналадок. Для данной системы требуется получить условия существования стационарного режима, а также изучить его свойства.

В работе [3] итеративно-мажорантным методом были получены необходимые и достаточные условия существования в системе стационарного режима по каждому потоку Π_j.

Теорема 1. Критерием существования в системе единственного стационарного режима по потоку Π_j является неравенство $\lambda_j T(2s_j + q_j + 1) - l_j < 0$ относительно параметров λ_j, s_j, q_j данного потока, пропускной способности l_j обслуживающего устройства и длительности T полного цикла работы системы.

Отметим, что в случае выполнения системы неравенств $\lambda_j T(2s_j + q_j + 1) - l_j < 0$, $1 \le j \le m$, стационарный режим существует для всей системы управления потоками $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$. Перейдем к изучению свойств стационарного распределения последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,i-1}); i = 0, 1, \ldots\}$.

ИЗУЧЕНИЕ СВОЙСТВ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Покажем для начала, что последовательность $\{\Gamma_i, i = 0, 1, \ldots\}$ состояний обслуживающего устройства является марковской цепью:

$$\mathbf{P}(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k)} \mid \Gamma_i = \Gamma^{(k_i)}) = \mathbf{P}(u(\Gamma_i) = \Gamma^{(k)} \mid \Gamma_i = \Gamma^{(k_i)}) = \mathbf{P}(u(\Gamma^{(k_i)}) = \Gamma^{(k)});$$

$$\mathbf{P}(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k)} \mid \Gamma_r = \Gamma^{(k_r)}, r = 0, 1, \ldots, i) = \mathbf{P}(u(\Gamma_i) = \Gamma^{(k)} \mid \Gamma_r = \Gamma^{(k_r)}, r = 0, 1, \ldots, i) =$$

$$= \mathbf{P}(u(\Gamma^{(k_i)}) = \Gamma^{(k)} \mid \Gamma_r = \Gamma^{(k_r)}, r = 0, 1, \ldots, i) = \mathbf{P}(u(\Gamma^{(k_i)}) = \Gamma^{(k)}) = \mathbf{P}(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k)} \mid \Gamma_i = \Gamma^{(k_i)}).$$

Поскольку состояния обслуживающего устройства меняются циклически на множестве $\Gamma = \{\Gamma^{(k)}; 1 \le k \le 2m\}$ из $2m$ элементов, то указанная цепь Маркова является периодической с периодом $2m$. Кроме того, легко показать, что стационарное распределение данной последовательности является равномерным на множестве $\{\Gamma^{(k)}; 1 \le k \le 2m\}$ и можно записать $\lim_{i\to\infty}\mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(k)}) = 1/(2m)$, $1 \le k \le 2m$.

Введем обозначения $Q_{j,i}(\Gamma^{(k)}, x, y) = \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(k)}, æ_{j,i} = x, \xi'_{j,i-1} = y)$ и для стационарного распределения $Q_j(\Gamma^{(k)}, x, y) = \lim_{i\to\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(k)}, x, y)$, где $1 \le j \le m$, $i = 0, 1, \ldots$, $1 \le k \le 2m$, $x \in \{0, 1, \ldots\}$, $y \in \{0, 1, \ldots, l_j\}$. Пусть также $\Gamma^{(0)} \equiv \Gamma^{(2m)}$, $\Gamma^{(1)} \equiv \Gamma^{(2m+1)}$, $T_0 \equiv T_{2m}$, $T_1 \equiv T_{2m+1}$.

Теорема 2. Стационарные вероятности вида $Q_j(\Gamma^{(r)}, 0, 0)$, $1 \le r \le 2m$, удовлетворяют соотношениям

$$Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0) = \frac{\exp\{-\lambda_j T\}}{1 - \exp\{-\lambda_j T\}} \sum_{y=1}^{l_j} Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y);$$

$$Q_j(\Gamma^{(k)}, 0, 0) = \frac{\exp\{-\lambda_j \sum_{i=2j}^{k-1} T_i\}}{1 - \exp\{-\lambda_j T\}} \sum_{y=1}^{l_j} Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y), \quad k \in \{2j+1, 2j+2, \ldots, 2m\}; \tag{2}$$

$$Q_j(\Gamma^{(k)}, 0, 0) = \frac{\exp\{-\lambda_j (\sum_{i=2j}^{2m} T_i + \sum_{i=1}^{k-1} T_i)\}}{1 - \exp\{-\lambda_j T\}} \sum_{y=1}^{l_j} Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y), \quad k \in \{1, 2, \ldots, 2j-1\}.$$

Доказательство. В работе [2] были выведены рекуррентные по времени соотношения для вероятностей $Q_{j,i}(\Gamma^{(k)}, x, y)$. Если выбрать в качестве начального распределения стационарное, то указанные соотношения будут иметь следующий вид:

$$Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y) = \sum_{v=0}^{y} Q_j(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0)\varphi_j(y-v; T_{2j-1});$$

$$Q_j(\Gamma^{(2j)}, x, l_j) = \sum_{v=0}^{x+l_j} Q_j(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0)\varphi_j(x+l_j-v; T_{2j-1});$$

$$Q_j(\Gamma^{(2j+1)}, x, 0) = \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w)\varphi_j(x; T_{2j}) + \sum_{v=0}^{x} Q_j(\Gamma^{(2j)}, v, l_j)\varphi_j(x-v; T_{2j});$$

$$Q_j(\Gamma^{(k)}, x, 0) = \sum_{v=0}^{x} Q_j(\Gamma^{(k-1)}, v, 0)\varphi_j(x-v; T_{k-1}), \quad \Gamma^{(k)} \in \Gamma \setminus \{\Gamma^{(2j)}, \Gamma^{(2j+1)}\}.$$

Тогда для вероятностей $Q_j(\Gamma^{(k)}, 0, 0)$ верны равенства $Q_j(\Gamma^{(k+1)}, 0, 0) = Q_j(\Gamma^{(k)}, 0, 0)\varphi_j(0; T_k)$, $k \in \{1, 2, \ldots, 2m\} \setminus \{2j\}$, и $Q_j(\Gamma^{(2j+1)}, 0, 0) = \sum_{y\in\{0,1,\ldots,l_j\}} Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y)\varphi_j(0; T_{2j})$. Теперь выразим $Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0) = \sum_{y\in\{0,1,\ldots,l_j\}} Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y)\varphi_j(0; T) = \exp\{-\lambda_j T\}\sum_{y\in\{0,1,\ldots,l_j\}} Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y)$ и, значит, получим $Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0) = (\exp\{-\lambda_j T\})/(1 - \exp\{-\lambda_j T\})\sum_{y\in\{1,2,\ldots,l_j\}} Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y)$. Кроме того, согласно соотношениям для $Q_j(\Gamma^{(k)}, 0, 0)$, $1 \le k \le 2m$, справедливы преобразования: $Q_j(\Gamma^{(2j+1)}, 0, 0) = \sum_{y\in\{0,1,\ldots,l_j\}} Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y)\, \varphi_j(0; T_{2j}) = \sum_{y\in\{1,2,\ldots,l_j\}} Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y)\varphi_j(0; T_{2j}) + e^{-\lambda_j T}\times$ $\times (1 - e^{-\lambda_j T})^{-1}\sum_{y\in\{1,2,\ldots,l_j\}} Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y)\, \varphi_j(0; T_{2j})$. Отсюда имеем $Q_j(\Gamma^{(2j+1)}, 0, 0) = \exp\{-\lambda_j T_{2j}\} \times$ $\times (1 - \exp\{-\lambda_j T\})^{-1}\sum_{y\in\{1,2,\ldots,l_j\}} Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y)$. Аналогичным образом получим равенства для всех вероятностей $Q_j(\Gamma^{(k)}, 0, 0)$, $1 \le k \le 2m$, что доказывает утверждение теоремы.

Заметим, что система (2) из $2m$ уравнений содержит $2m$ неизвестных вероятностей в левой части и l_j – в правой. Необходимо найти еще l_j уравнений для решения системы.

В дальнейшем будут использоваться результаты работы [1], согласно которым производящая функция $\Psi_j(z; T_k) = \sum_{x=0}^{\infty} \varphi_j(n; T_k) z^x$ условного распределения входного потока Π_j имеет вид $\Psi_j(z; T_k) = \exp\{\lambda_j T_k(s_j z^3 + q_j z^2 + p_j z - 1)\}$.

Теорема 3. Для производящих функций $\Phi_j(\Gamma^{(k)}, z, y) = \sum_{x=0}^{\infty} Q_j(\Gamma^{(k)}, x, y) z^x$ стационарных распределений, определенных для $1 \le k \le 2m$, $y \in \{0, 1, \ldots, l_j\}$, $|z| \le 1$, справедливы следующие равенства:

$$\Phi_j\left(\Gamma^{(2j)}, z, l_j\right) = \left(z^{l_j} - \Psi_j(z; T)\right)^{-1} \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w)\left(\Psi_j(z; T) - z^w\right);$$

$$\Phi_j\left(\Gamma^{(k_1)}, z, 0\right) = \left(z^{l_j} - \Psi_j(z; T)\right)^{-1} \prod_{i=2j}^{k_1-1} \Psi_j(z; T_i) \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w)\left(z^{l_j} - z^w\right); \qquad (3)$$

$$\Phi_j\left(\Gamma^{(k_2)}, z, 0\right) = \left(z^{l_j} - \Psi_j(z; T)\right)^{-1} \prod_{i\in\{1,\ldots,k_2-1,2j,\ldots,2m\}} \Psi_j(z; T_i) \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w)\left(z^{l_j} - z^w\right);$$

$$k_1 = 2j+1, 2j+2, \ldots, 2m; \quad k_2 = 1, 2, \ldots, 2j-1.$$

Доказательство. Приведем здесь лишь вывод первого соотношения из группы (3). В работе [2] были получены рекуррентные соотношения для производящих функций одномерных распределений цепи Маркова $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,i-1}); i = 0, 1, \ldots\}$ за $2m$ переходов. В случае существования в системе стационарного режима выберем стационарное распределение в качестве начального и из указанных соотношений получим следующее:

$$\Phi_j\left(\Gamma^{(2j)}, z, l_j\right) = z^{-l_j}\Phi_j\left(\Gamma^{(2j)}, z, l_j\right)\Psi_j\left(z;T\right) + z^{-l_j}\Psi_j\left(z;T\right)\sum_{w=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w) -$$

$$- z^{-l_j}\sum_{v=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0)z^v \sum_{r=0}^{l_j-v-1} z^r \varphi_j\left(r;T_{2j-1}\right) = z^{-l_j}\Phi_j\left(\Gamma^{(2j)}, z, l_j\right)\Psi_j\left(z;T\right) + \tag{4}$$

$$+ z^{-l_j}\sum_{w=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w)\left(\Psi_j\left(z;T\right) - z^w\right),$$

где последнее равенство возможно в силу полученных в [2] рекуррентных соотношений для одномерных распределений последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,i-1}); i = 0, 1, \ldots\}$. Из (4) очевидным образом следует первое соотношение из (3). Остальные равенства из (3) можно вывести аналогичным образом.

Теорема 4. Значения для стационарных вероятностей вида $Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y)$, $0 \le y \le l_j$, являются решением системы уравнений

$$Q_j(\Gamma^{(2j)},0,0) - \frac{\exp\{-\lambda_j T\}}{1-\exp\{-\lambda_j T\}}\sum_{y=1}^{l_j} Q_j(\Gamma^{(2j)},0,y) = 0; \tag{5}$$

$$2m\sum_{w=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)},0,w)(l_j - w) = l_j - \lambda_j T(1 + q_j + 2s_j); \tag{6}$$

$$\sum_{w=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)},0,w)(z_k^{\,l_j} - z_k^{\,w}) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, l_j - 1; \tag{7}$$

где числа z_k есть отличные от единицы корни уравнения $z_{l_j} - \Psi_j(z;T) = 0$.

Доказательство. В работе [4] было установлено, что полином $z_{l_j} - \Psi_j(z;T)$ в круге $\{z: |z| \le 1\}$ имеет l_j различных нулей. Данный полином стоит в знаменателе выражений (3), а поскольку производящая функция является ограниченной в единичном круге, то нули ее знаменателя должны также являться нулями ее числителя. Из этих рассуждений получаем соотношения (7).

Далее, с учетом выражений (3) преобразуем следующую производящую функцию:

$$\Phi_j(z) = \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)},0,w)z^0 + \Phi_j(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) + \sum_{k\in\{1,\ldots,2m\}\setminus\{2j\}} \Phi_j(\Gamma^{(k)}, z, 0) =$$

$$= \left(z^{l_j} - \Psi_j\left(z;T\right)\right)^{-1}\left[\sum_{w=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)},0,w)\left(z^{l_j} - \Psi_j\left(z;T\right)\right) + \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)},0,w)\left(\Psi_j\left(z;T\right) - z^w\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=2j+1}^{2m}\sum_{w=0}^{l_j-1}\left(z^{l_j} - z^w\right)Q_j(\Gamma^{(2j)},0,w)\prod_{u=2j}^{k-1}\Psi_j(z;T_u) + \sum_{k=1}^{2j-1}\sum_{w=0}^{l_j-1}\left(z^{l_j} - z^w\right)Q_j(\Gamma^{(2j)},0,w)\prod_{u\in\{1,\ldots,k-1,2j,\ldots,2m\}}\Psi_j(z;T_u)\right] =$$

$$= \left(z^{l_j} - \Psi_j\left(z;T\right)\right)^{-1}\sum_{w=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)},0,w)\left(z^{l_j} - z^w\right)\left[1 + \sum_{k=2j+1}^{2m}\prod_{u=2j}^{k-1}\Psi_j(z;T_u) + \sum_{k=1}^{2j-1}\prod_{u\in\{1,\ldots,k-1,2j,\ldots,2m\}}\Psi_j(z;T_u)\right].$$

Применим к полученному выражению правило Лопиталя при $z \to 1-0$. После преобразований и с учетом $\Psi'_j(z;t) = \lambda_j t(3s_j z^2 + 2q_j z + p_j)\Psi_j(z;t)$ получим

$$\lim_{z\to 1-0}\Phi_j(z)=\left(l_j-\lambda_j T(3s_j+2q_j+p_j)\right)^{-1}\left(\sum_{w=0}^{l_j-1}2m(l_j-w)Q_j(\Gamma^{(2j)},0,w)\right). \quad (8)$$

Поскольку $\lim_{z\to 1-0}\Phi_j(z)=1$, то из (8) получим (6). Определитель матрицы A полученной линейной системы уравнений (5) – (7) можно вычислить, разложив его сначала по последнему столбцу, а затем проведя элементарные преобразования со столбцами:

$$\det A=\begin{vmatrix} -1 & \frac{e^{-\lambda_j T}}{1-e^{-\lambda_j T}} & \cdots & \frac{e^{-\lambda_j T}}{1-e^{-\lambda_j T}} & \frac{e^{-\lambda_j T}}{1-e^{-\lambda_j T}} \\ l_j & l_j-1 & \cdots & 1 & 0 \\ z_1^{l_j} & z_1^{l_j}-z_1 & \cdots & z_1^{l_j}-z_1^{l_j-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z_{l_j-1}^{l_j} & z_{l_j-1}^{l_j}-z_{l_j-1} & \cdots & z_{l_j-1}^{l_j}-z_{l_j-1}^{l_j-1} & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{l_j+2}\frac{e^{-\lambda_j T}}{1-e^{-\lambda_j T}}\prod_{i=1}^{l_j-1}(z_i-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & z_1 & \cdots & z_1^{l_j-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_{l_j-1} & \cdots & z_{l_j-1}^{l_j-1} \end{vmatrix}.$$

Получаем в последнем равенстве определитель Вандермонда для различных чисел $1, z_1, \ldots, z_{l_j-1}$, поэтому $\det A\neq 0$ и система (5) – (7) однозначно определяет вероятности $Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y)$, $0\le y\le l_j$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fedotkin, M.* Parameters Estimator of the Probabilistic Model of Moving Batches Traffic Flow / M. Fedotkin, M. Rachinskaya // Distributed Computer and Communication Networks. Springer, Communications in Computer and Information Science Series, 2014. V. 279, P. 154–168.

2. *Рачинская, М. А.* Построение вероятностной модели процесса циклического управления конфликтными потоками пачек в условиях малой плотности / М. А. Рачинская, М. А. Федоткин / Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского. Н. Новгород, 2014. 30 с. Деп. в ВИНИТИ 14.01.2014. № 13.

3. *Рачинская, М. А.* Построение и исследование вероятностной модели циклического управления потоками малой интенсивности / М. А. Рачинская, М. А. Федоткин // Вестник ННГУ им. Н.И.Лобачевского. 2014. № 4(1). С. 370–376.

4. *Рачинская, М. А.* Предельные свойства распределений выходных процессов циклического управления конфликтными потоками пачек в условиях малой плотности / М. А. Рачинская, М. А. Федоткин / Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского. Н. Новгород, 2014. 38 с. Деп. в ВИНИТИ 23.04.2014. № 111.